



TITLE:

Anosov type の geodesic flow をもち focal point をもたない多様体における Visibility Axiom(力学系の研究)

AUTHOR(S):

鵜飼, 徹夫

---

CITATION:

鵜飼, 徹夫. Anosov type の geodesic flow をもち focal point をもたない多様体における Visibility Axiom(力学系の研究). 数理解析研究所講究録 1989, 696: 106-117

ISSUE DATE:

1989-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101424>

RIGHT:

# Anosov type の geodesic flow をもち focal point を もたない多様体における Visibility Axiom

名 大 理 鵜 飼 徹 夫 (Tetsuo Ukai)

## 1. はじめに

$M$  を単連結完備リーマン多様体で focal point をもたないものとする。(完備リーマン多様体  $M'$  が、focal point をもたないとは、任意の geodesic  $\tau: \mathbb{R} \rightarrow M'$  が  $M'$  の 1 次元部分多様体として focal point をもたないことである。)

$M$  の次元を  $n$  とする。 $d(\quad, \quad)$  を  $M$  上の距離関数とする。 $SM$  を  $M$  の unit tangent bundle とする。任意の vector  $v \in SM$  に対し  $\gamma_v$  を  $\gamma_v'(0) = v$  をみたす  $M$  の unique な maximal geodesic とする。ただし  $\gamma_v'(t)$  は  $\gamma_v$  の時刻  $t$  における速度である。 $SM$  上の geodesic flow  $T_t: SM \rightarrow SM (t \in \mathbb{R})$  は、 $v \in SM$  に対し、 $T_t v := \gamma_v'(t)$  と定義される。geodesic flow によって定義される  $SM$  上の vector field を  $V$  とする。

定義 1.1.  $SM$  上の geodesic flow が Anosov type であるとは、次の条件がみたされることである。

$v \in SM$  に対し、 $v$  における tangent space  $(SM)_v$  は次のように直和分解される。

$$(SM)_v = X_s^*(v) \oplus X_u^*(v) \oplus Z(v)$$

( $\dim X_s^*(v) > 0$ ,  $\dim X_u^*(v) > 0$ ,  $\dim Z(v) = 1$ ) ここに、 $Z(v)$  は  $V(v)$  によって生成される vector space である。さらに、ある正の数  $a, b, c$  が存在し、次の i), ii) が成立する。

$$i) \quad \forall \xi \in X_s^*(v) \text{ に対し、} \|dT_t \xi\| \leq a \|\xi\| e^{-ct} \quad (t \geq 0)$$

$$\|dT_t \xi\| \geq b \|\xi\| e^{-ct} \quad (t \leq 0)$$

$$ii) \quad \forall \eta \in X_u^*(v) \text{ に対し、} \|dT_t \eta\| \leq a \|\eta\| e^{ct} \quad (t \leq 0)$$

$$\|dT_t \eta\| \geq b \|\eta\| e^{ct} \quad (t \geq 0)$$

ただし、 $\|\cdot\|$  は  $SM$  上の自然な Riemannian metric による norm である。

$M$  上の 2 つの unit speed geodesic  $c_1, c_2$  は、ある定数  $b_1$  が存在して  $\forall t \geq 0$  に対し、 $d(c_1(t), c_2(t)) \leq b_1$  となるとき asymptotic であると呼ばれる。asymptotic 関係は、同値関係であるので、 $\{c \mid c \text{ は } M \text{ 上の unit speed geodesic}\}$  を、この関係で割ってできる集合を  $M(\infty)$  と書き、 $M$  の境界と呼ぶ。asymptotic 関係による同値類を 無限遠点 と呼ぶ。unit speed geodesic  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  に対応する同値類のことを  $c(\infty)$  と書き、パラメーターを逆にした geodesic  $t \rightarrow c(-t)$  に対応する同値類のことを  $c(-\infty)$  と書く。

以上のような定義のもと、次の定理を得た。

主定理  $M$  を focal point をもたない単連結完備リーマン多様体とする。 $M$  の断面曲率  $K$  は  $K > -k^2$  ( $k$  はある正の定数) をみたし、 $SM$  上の geodesic flow は Anosov type であるとする。そのとき、 $\forall z, w \in M(\infty), z \neq w$  に対し、unit speed geodesic  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  で  $\alpha(-\infty) = z, \alpha(\infty) = w$  をみたすものが、parameter の translation による parameter の取替えを除いて unique に存在する。

この定理は、[9] の Theorem 4.3 の拡張になっている。

任意の  $p \in M$  と任意の  $x, y \in \bar{M} := M \cup M(\infty), p \neq x, p \neq y$  に対し、

$\angle_p(x, y) := \angle(\gamma'_{px}(0), \gamma'_{py}(0))$  と定める。

ただし、 $\gamma_{px}, \gamma_{py}$  は、それぞれ  $p$  から  $x, p$  から  $y$  への unit speed geodesic である。

$M$  が次の条件をみたすとき、 $M$  は Visibility Axiom をみたすという。

$\forall p \in M$  と  $\forall \varepsilon > 0$  に対して、ある  $r(p, \varepsilon) \in \mathbb{R}$  が存在し、geodesic segment  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  が  $d(p, \gamma([a, b])) \geq r$  をみたすならば、 $(\gamma(a), \gamma(b)) \leq \varepsilon$  が成立する。

主定理より次の系を得る。

系 主定理の仮定のもとに、 $M$  は Visibility Axiom をみたす。

主定理の証明の概略と系の証明は、§3で述べる。

1989年2月に京都大学数理解析研究所で開かれた研究集会「力学系の研究」の1カ月程後に、R.O.R. Rodriguez氏からの手紙により、筆者は、Mañé[6]が主定理よりも、より一般的な結果を得ていたことを知った。

Mañéの得たその結果は、主定理を含んでいる。

主定理の証明方法は、Mañéの証明方法と、少し異なる。

## 2. Lagrange tensor

$\forall v \in SM$  に対し、 $N\gamma_v := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{x \in M_{\gamma_v(t)}; x \perp \gamma'_v(t)\}$  と定める。ただし、 $M_{\gamma_v(t)}$  は  $\gamma_v(t)$  における tangent space である。  $N\gamma_v$  は、geodesic  $\gamma_v: \mathbb{R} \rightarrow M$  の normal bundle である。 $N\gamma_v$  の smooth bundle endomorphism  $R_v: N\gamma_v \rightarrow N\gamma_v$  を、 $x \mapsto R(\gamma'_v(t), x)\gamma'_v(t)$  によって定義する。ただし、 $R$  は  $M$  の curvature tensor である。(  $X, Y, Z$  を  $M$  上の vector field とする。  $R(X, Y)Z$  は  $R(X, Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z$  と定義される。 )

定義 2.1.  $\forall v \in SM$  に対し、 $Y$  を  $N\gamma_v$  の smooth bundle endomorphism とする。 $Y$  を  $\gamma_v(t)$  上の fiber に制限したものを  $Y(t)$  と書く。次の条件がみたされるときに、 $Y$  は  $\gamma_v$  に沿う Jacobi tensor と呼ばれる。

1) ある  $t \in R$  に対し、 $\ker Y(t) \cap \ker Y'(t) = 0$

2)  $Y$  は、次の differential equation をみたす。

$$Y'' + R_v \cdot Y = 0$$

ただし、 $Y'$  は、 $\gamma_v'$  に関する covariant derivative である。

任意の Jacobi tensor を  $\gamma_v$  に沿うすべての parallel normal vector field に適用することにより、 $\gamma_v$  に沿う

Jacobi field の  $(n-1)$  次元空間が得られる。

$\gamma_v$  に沿う 2 つの Jacobi tensor  $Y, Z$  に対し、 $W(Y, Z) := Y'^* Z - Y^* Z'$  と定める。ただし、 $Y^*$  は、Riemannian metric に関する adjoint である。 $W(Y, Z)$  は、 $Y$  と  $Z$  の Wronskian と呼ばれる。

定義 2.2.  $\forall v \in SM$  に対し、 $Y$  を  $\gamma_v$  に沿う Jacobi tensor とする。 $Y$  が  $W(Y, Y) \equiv 0$  をみたすとき、 $Y$  は、 $\gamma_v$  に沿う Lagrange tensor と呼ばれる。

$A$  を、Lagrange tensor で、初期値  $A(0) = 0$ 、 $A'(0) = 1$  によって与えられるものとする。任意の実数  $t \neq 0$  に対し、 $A$  は nonsingular である。任意の実数  $s \neq 0$  に対し、 $D_s$  を、Lagrange tensor で、境界値  $D_s(0) = 1$ 、 $D_s(s) = 0$  によって与えられるものとする。任意の実数  $t \neq s$  に対し、 $D_s$  は nonsingular である。 $s \rightarrow \infty$  とするとき、 $D_s$  は、

Lagrange tensor  $D$  に収束することが知られている。

$D$  は、 stable Jacobi tensor と呼ばれる。 $\forall t \in \mathbb{R}$  に対し、 $D$  は nonsingular である。どの geodesic に沿うかを示すために、 $\forall v \in SM$  に対し  $A_v, D_v$  を、それぞれ、 $\gamma_v$  に沿う Jacobi tensor  $A, D$  とする。

補題 2.3. ([4], p.247)  $M$  を focal point をもたない単連結完備リーマン多様体とする。 $M$  の断面曲率  $K$  は  $K > -k^2$  ( $k$  はある正の定数) をみたすとする。 $X := A^{-1}D$  とし、 $T := (1/k) \operatorname{arccoth}(2/k)$  とする。そのとき、 $\forall t \geq T$  に対し、

$$((A(t))) \geq (4k \|X(t)\|)^{-1/2}$$

が成り立つ。ただし、

$$((A(t))) := \min \{ \|A(t)x\| ; \|x\| = 1 \} \text{ である。}$$

次の命題の証明の中で、[4], p.245 で用いられた方法を、用いる。

命題 2.4.  $M$  を focal point をもたない単連結完備リーマン多様体とする。 $M$  の断面曲率  $K$  は  $K > -k^2$  ( $k$  はある正の定数) をみたし、 $SM$  上の geodesic flow は Anosov type であるとする。そのとき、 $\forall v \in SM, \forall t \geq T = (1/k) \operatorname{arccoth}(2/k)$  に対し、

$$((A_v(t))) \geq (8a^2 k(1+k^2)c)^{-1/2} (e^{ct} - 1)$$

が成り立つ。

(証明の概略)  $SM$  上の geodesic flow が Anosov type なの

で、 $\forall v \in SM$  に対し、 $\text{tangent space } (SM)_v$  は、定義 1.1 のように直和分解される。

$\forall t \geq 0$  に対し、 $\|D_v(t)\| \leq a(1+k^2)^{1/2} e^{-ct}$  が成り立つ。ただし、 $a, c$  は Anosov condition の中の定数であり、

$\|D_v(t)\| := \max\{\|D_v(t)x\|; \|x\|=1\}$  である。

$\forall t > 0$  に対し、 $A(t) = D(t) \int_0^t (D^* D)^{-1}(s) ds$  が成り立つ

([4], p. 245 参照)。

$X^{-1}(t) = (D^{-1}A)(t) = \int_0^t (D^* D)^{-1}$  より、

$$\begin{aligned} \|X(t)\|^{-1} &= \langle X^{-1}(t) \rangle \geq \int_0^t \langle (D^* D)^{-1} \rangle = \int_0^t \|D^* D\|^{-1} = \int_0^t \|D\|^{-2} \\ &\geq \int_0^t (a^2(1+k^2))^{-1} e^{2cs} ds = (a^2(1+k^2))^{-1} \int_0^t e^{2cs} ds \\ &= (a^2(1+k^2))^{-1} \left[ (1/2c) e^{2cs} \right]_0^t = (2a^2(1+k^2)c)^{-1} (e^{2ct} - 1) \end{aligned}$$

立つ。補題 2.3 より、

$$\langle A(t) \rangle \geq (4k \|X(t)\|)^{-1/2} \geq (8a^2 k(1+k^2)c)^{-1/2} (e^{2ct} - 1)^{1/2}$$

を得る。 $\forall t \geq 0$  に対し、 $(e^{2ct} - 1) - (e^{ct} - 1)^2 = 2e^{ct} - 2 \geq 0$  であるから、この命題を得る。

### 3. 無限遠点と Visibility Axiom

$\forall z, w \in M(\infty)$  に対し、 $\chi(z, w) := \sup_{p \in M} \chi_p(z, w)$ ,

$l(z, w) := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup (1/t) d(\gamma_{qz}(t), \gamma_{qw}(t))$  と定義する。ただし、 $q \in M$  である。 $l(z, w)$  は点  $q \in M$  のとり方によらない。

$\forall z, w \in M(\infty)$  に対し、 $l(z, w) \leq 2$  である。



補題 3.1. ([8], p.25)  $\forall z, w \in M(\infty)$  に対し、

$$2 \sin^2(\angle(z, w)/2) \leq l(z, w) \leq 2 \sin(\angle(z, w)/2)$$

が成り立つ。

補題 3.2. ([8], p.27)  $z, w$  を、 $M(\infty)$  の点で、 $\angle(z, w) = \pi$  をみたすものとする。unit speed geodesic  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  で、 $c(-\infty) = z$ ,  $c(\infty) = w$  をみたすものは、存在しないとする。そのとき、ある点  $u \in M(\infty)$  で、

$$\angle(z, u) = \angle(w, u) = \angle(z, w)/2 = \pi/2$$

をみたすものが存在する。

単連結完備リーマン多様体で、断面曲率が非正であるものを、Hadamard 多様体と呼ぶ。Hadamard 多様体の場合と同様に、次の命題が成り立つ。([8] 参照)。

命題 3.3.  $M$  が Visibility Axiom をみたすことは、任意の  $z, w \in M(\infty)$ ,  $z \neq w$  に対し、ある unit speed geodesic  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$  で、 $\alpha(-\infty) = z$ ,  $\alpha(\infty) = w$  をみたすものが存在することと同値である。

主定理の証明の中で、[8], p.26 で用いられた方法を、用いる。

主定理の証明の概略)  $z, w \in M(\infty)$ ,  $z \neq w$  で、unit speed geodesic  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  で  $c(-\infty) = z$ ,  $c(\infty) = w$  をみたすものが存在しないものがあつたとする。補題 3.1 と 3.2 より、 $l(z, w) <$

2 としてよい。  $p \in M$  を fix する。  $\gamma, \sigma : [0, \infty) \rightarrow M$  を、それぞれ、  $p$  から  $z$ ,  $p$  から  $w$  への unit speed geodesic とする。

$\rho(t)$  を、  $\gamma(t)$  と  $\sigma(t)$  を結ぶ geodesic segment と、  $p$  との距離とする。  $M$  が focal point をもたないことより、任意の Jacobi field  $J(t)$  で、  $J(0) = 0$  をみたすものは、  $t \geq 0$  で単調に増加する長さ  $\|J(t)\|$  をもつ。 よって、  $p$  における極座標を用いることにより、

$$d(\gamma(t), \sigma(t)) \geq d_{p, \rho(t)}^S(\gamma(\rho(t)), \sigma(\rho(t)))$$

を得る。 ただし、  $d_{p, \rho(t)}^S$  は、 sphere  $S_{\rho(t)}(p) := \{q \in M; d(p, q) = \rho(t)\}$  上の距離関数である。  $\alpha_t : [0, d_0] \rightarrow M$  を  $\gamma(t)$  から  $\sigma(t)$  への geodesic segment とし、  $d_1 \in [0, d_0]$  を  $d(p, \alpha_t(d_1)) = \rho(t)$  をみたす数とする。

$L(\alpha_t|_{[0, d_1]}) \geq L(\gamma|_{[p(t), t]})$  と  $L(\alpha_t|_{[d_1, d_0]}) \geq L(\sigma|_{[p(t), t]})$  が成り立つ。 ただし、  $L(\cdot)$  は曲線の長さである。 よって、

$$d(\gamma(t), \sigma(t)) \geq 2(t - \rho(t))$$

が成り立つ。 よって、

$$\begin{aligned} & (1/t)d(\gamma(t), \sigma(t)) \\ & \geq (\rho(t)/t)(d_{p, \rho(t)}^S(\gamma(\rho(t)), \sigma(\rho(t)))/\rho(t)) \\ & \geq (1/t)(t - (1/2)d(\gamma(t), \sigma(t))) \\ & \quad \times (d_{p, \rho(t)}^S(\gamma(\rho(t)), \sigma(\rho(t)))/\rho(t)) \\ & = (1 - (1/2)(1/t)d(\gamma(t), \sigma(t))) \end{aligned}$$

$$\times (d_{p, \rho(t)}^S(\gamma(\rho(t)), \sigma(\rho(t))) / \rho(t))$$

が成り立つ。

unit speed geodesic  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  で  $c(-\infty) = z$ ,  $c(\infty) = w$  をみ  
すものが存在しないので、 $\rho(t) \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$  である。よって、  
 $l(z, w) < 2$  であることより、

(\*) ある数列  $\{t_i\}$  で、 $t_i \rightarrow \infty (i \rightarrow \infty)$  をみだし、

$(1/t_i)(d_{p, t_i}^S(\gamma(t_i), \sigma(t_i)))$  が上に有界であるもの  
が存在する。

$t > 0$  を fix する。  $\mu: [0, l_0] \rightarrow S_t(p)$  を sphere  $S_t(p) =$   
 $\{q \in M; d(p, q) = t\}$  の中の geodesic で、 $\mu(0) = \gamma(t)$ ,  
 $\mu(l_0) = \sigma(t)$  をみたすものとする。

variation  $a: [0, l_0] \times [0, \infty) \rightarrow M$  を、 $a(s, u) := \sigma_s(u)$  と定義す  
る。ただし、 $\sigma_s: [0, \infty) \rightarrow M$  は、geodesic で、 $\sigma_s(0) = p$ ,  $\sigma_s(t)$   
 $= \mu(s)$  をみたすものとする。  $u \mapsto \frac{\partial a}{\partial s}(s, u)$  は nontrivial  
Jacobi field なので、 $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial a}{\partial s}(s, 0) \neq 0$  である。ただし、 $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial a}{\partial s}$   
は covariant derivative である。

$$v(s) := \frac{D}{\partial u} \frac{\partial a}{\partial s}(s, 0) \text{ とすると}$$

$$\frac{\partial a}{\partial s}(s, u) = (A_{\sigma_s(0)}(u))v(s) \text{ が成り立つ。}$$

よって、命題 2.4 より、

$$d_{p, t}^S(\gamma(t), \sigma(t)) = \int_0^{l_0} \left\| \frac{\partial a}{\partial s}(s, t) \right\| ds \geq$$

$$\int_0^{l_0} B(e^{ct} - 1) \left\| \frac{D}{\partial u} \frac{\partial a}{\partial s}(s, 0) \right\| ds = B(e^{ct} - 1) \int_0^{l_0} \left\| \frac{D}{\partial s} \frac{\partial a}{\partial u}(s, 0) \right\| ds$$

$$\geq B(e^{ct} - 1) \angle(\gamma'(0), \sigma'(0))$$

を得る。ただし、 $B := (8a^2 k(1+k^2)c)^{-1/2}$  とした。

これは、(\*)に矛盾する。ゆえに、 $\forall z, w \in M(\infty), z \neq w$  に対し、ある unit speed godesic  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$  で、 $\alpha(-\infty) = z, \alpha(\infty) = w$  をみたすものが存在する。このような godesic の uniqueness は、flat strip theorem などを用いて証明される。

系の証明) 主定理と、命題 3.3より明らか。

#### References

1. Ballmann, W., Gromov, M. and Schroeder, V.,  
Manifolds of nonpositive curvature, Birkhäuser,  
Boston, 1985.
2. Eberlein, P., When is a geodesic flow of Anosov  
type? I, J. Differential Geometry 8, 437-463(1973).
3. Eberlein, P., and O'Neill, B., Visibility  
manifolds, Pacific J. Math. 46, 45-110 (1973).
4. Eschenburg, J.H., Horospheres and the stable part  
of the geodesic flow, Math. Z. 153, 237-251 (1977).
5. Innami, N., Convexity in Riemannian manifolds  
without focal points, Advanced Studies in Pure

- Math. 3, 311-332 (1984).
6. Mañé, R., On a Theorem of Klingenberg,  
In: Dynamical systems and bifurcation theory,  
Camacho, M.I., Pacifico, M.J. and  
Takens, F.(eds.), Pitman Research Notes in Math.  
Series 160, 319-345 (1987).
7. Milnor, J., Morse theory, Princeton University  
Press, Princeton, 1969.
8. Uesu, K., The Tits metric on the boundaries of  
focal points free manifolds and its application,  
Memoirs of the Faculty of Science,  
Kyushu University, Ser. A, Vol. 42, 21-35 (1988).
9. Ukai, T., The Visibility Axiom on a Hadamard  
manifold whose geodesic flow is of Anosov type,  
Proc. Amer. Math. Soc. 104, 577-583 (1988).